

Računarska grafika

Transformacije u 2D



Geometrijske transformacije

- Geometrijske transformacije preslikavaju originalnu tačku u njenu sliku
- Postoje dve konvencije za geometrijske transformacije kretanja (translacije i rotacije):
 - konvencija pokretnog koordinatnog sistema (pokretne virtuelne kamere, odnosno posmatrača)
 - konvencija pokretnog objekta
- Kretanja se u praksi kombinuju (kreće se i objekat i posmatrač)
- Za izvođenje jednačina kretanja pogodno je usvojiti jednu konvenciju
- Ovde se podrazumeva:
 - da se tačka nalazi u pravouglom koordinatnom sistemu
 - X-osa raste sleva-udesno, a Y-osa odozdo naviše
 - da se primenjuje konvencija pokretne virtuelne kamere

Transformacije u 2D

- 2D pravougli koordinatni sistem je ovde definisan na sledeći način:
 - koordinatna osa prve koordinate (X) se prevodi u osu druge koordinate (Y) rotacijom oko koordinatnog početka za 90° u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku
 - X-osa je horizontalna i raste sleva-udesno
- Linearne transformacije: skaliranje, rotacija, smicanje
- Afina transformacija: linearna transformacija koju sledi translacija
- U slučaju afinih transformacija, ako su koordinate originalne tačke (x,y), koordinate neke tačke nakon transformacije su (x',y'):
$$\begin{aligned}x' &= A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1 \cdot 1 \\y' &= A2 \cdot x + B2 \cdot y + C2 \cdot 1 \\1 &= 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1\end{aligned}$$

Matrična predstava transformacija

- Poslednjim identitetom se proširuje sistem jednačina, da bi se predstavio u matričnom obliku (tačka – vektor vrsta):

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A1 & A2 & 0 \\ B1 & B2 & 0 \\ C1 & C2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$Q = P \cdot M$$

– gde je: Q – slika tačke, P – original tačke, M – matrica transformacija

- Drugi oblik matrične jednačine (tačka – vektor kolona): $Q^T = M^T \cdot P^T$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogene koordinate

- Predstava tačke u vektorskom obliku $[x \ y]$ se proširuje trećom koordinatom jednakom 1: $[x \ y \ 1]$
- Koordinatni sistem za ovakvo predstavljanje tačke se naziva sistemom sa *homogenim koordinatama*
- Homogene koordinate čine matematički aparat uniformnim za sve transformacije
- Svaka transformacija se predstavlja adekvatnom matricom transformacije M
- Treća kolona matrice M je konstantna za sve 2D transformacije
- Jednom izračunata matrica transformacije se koristi
 - da bi se sve relevantne tačke neke 2D slike transformisale na jedinstven način
- U petlji se množe vektori originalnih tačaka matricom transformacije:

```
for (i=0; i<n; i++) q[i]=transform(p[i],M);
```
- Elementarnim transformacijama u 2D se smatraju
 - translacija, rotacija, skaliranje i smicanje (iskošenje)

Translacija

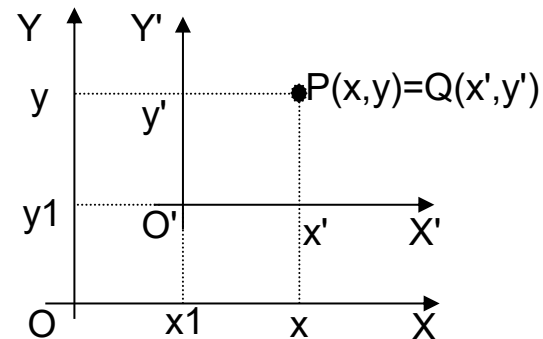
- Koordinatni početak $O(0,0)$ se translatorno pomera u tačku $O'(x_1, y_1)$:

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y - x_1 \cdot 1$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y - y_1 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{bmatrix}$$



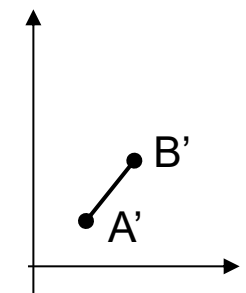
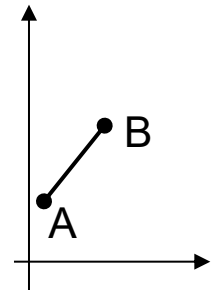
- Elementi C_1 i C_2 u opštoj matrici M
 - nazivaju se translatornim elementima

Translacija - primer

- Zadat je linijski segment krajnjim tačkama A(1,3) i B(4,6)
 - izvršiti translaciju koordinatnog sistema tako da se koordinatni početak premesti u tačku O'(-1,1)

$$A' = [1 \quad 3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 2 \quad 1]$$

$$B' = [4 \quad 6 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [5 \quad 5 \quad 1]$$



Rotacija

- Koordinatni sistem rotira oko centra u koordinatnom početku za ugao α u smeru nasuprot kretanja kazaljke na časovniku

$$x' = (x + y \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + y' / \cos \alpha$$

$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

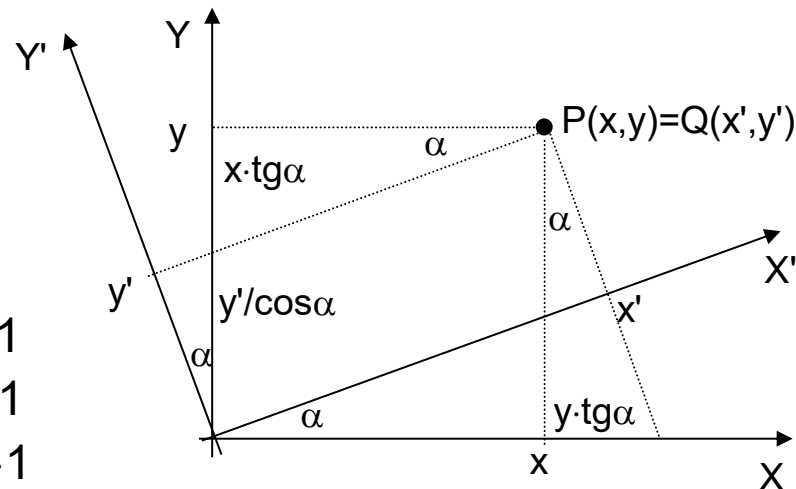
$$x' = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$y' = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$$

- Elementi A1, A2, B1 i B2 u opštoj matrici M
– nazivaju se rotacionim elementima

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

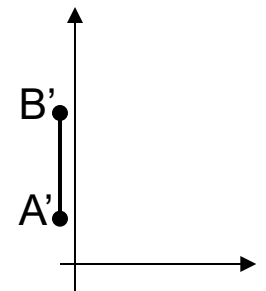
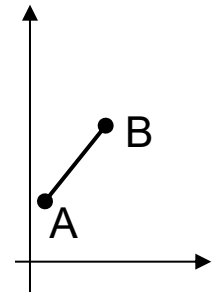


Rotacija - primer

- Zadat je linijski segment krajnjim tačkama A(1,3) i B(4,6)
 - rotirati koordinatni sistem za ugao $\alpha=45^\circ$ u smeru kazaljke na časovniku

$$A' = [1 \quad 3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2} \quad 1]$$

$$B' = [4 \quad 6 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-\sqrt{2} \quad 5\sqrt{2} \quad 1]$$



Skaliranje

- Faktori skaliranja po X i Y osi: S_x i S_y
- Efekat:
 - $S < 1 \Rightarrow$ smanjivanje objekta (udaljavanje posmatrača),
 - $S > 1 \Rightarrow$ povećanje objekta (približavanje posmatrača)
- Preslikavanje:

$$x' = S_x \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$y' = 0 \cdot x + S_y \cdot y + 0 \cdot 1$$

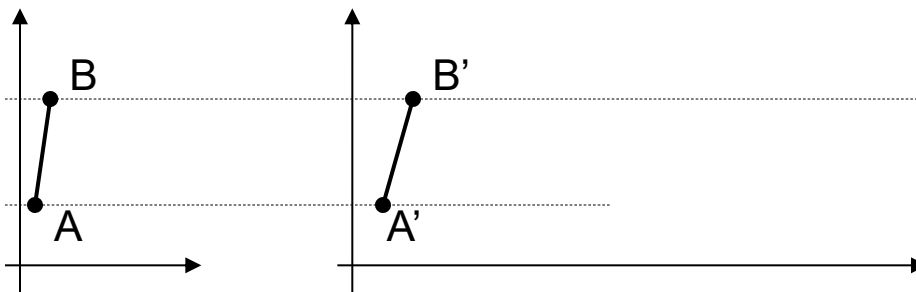
$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$$

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje - primer

- Primer:
 - segment linije određen je krajnjim tačkama A(1,3) i B(2,7).
 - izvršiti skaliranje, ako su dati skala faktori $S_x=2$ i $S_y=1$

$$A' = [1 \quad 3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 3 \quad 1] \quad B' = [2 \quad 7 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [4 \quad 7 \quad 1]$$



Ogledanje

- Ogledanje (refleksija) u ogledalu na Y-osi:
 $S_x = -1, S_y = 1$
- Ogledanje u ogledalu na X-osi:
 $S_x = 1, S_y = -1$
- Ogledanje u ogledalu na proizvoljnoj osi:
 - translacijom se dovede koordinatni početak na datu osu
 - rotacijom se X-osa poklopi sa datom osom
 - primeni se refleksija prema X-osi
 - inverzna rotacija
 - inverzna translacija

Smicanje (Iskošenje/Shear)

- Faktori smicanja po X i Y-osi: H_x i H_y , respektivno
- Preslikavanje:

$$x' = 1 \cdot x + H_x \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$y' = H_y \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & H_y & 0 \\ H_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

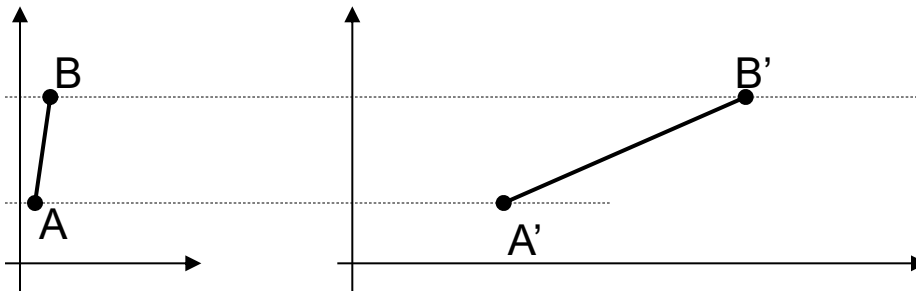
- Smicanje samo u pravcu i smeru X-ose: $H_y=0$;
- Smicanje samo u pravcu i smeru Y-ose: $H_x=0$

Smicanje - primer

- Primer:

- segment linije određen je krajnjim tačkama A(1,3) i B(2,7)
- izvršiti smicanje, ako su dati faktori smicanja $H_x=2$ i $H_y=0$

$$A' = [1 \ 3 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [7 \ 3 \ 1] \quad B' = [2 \ 7 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [16 \ 7 \ 1]$$

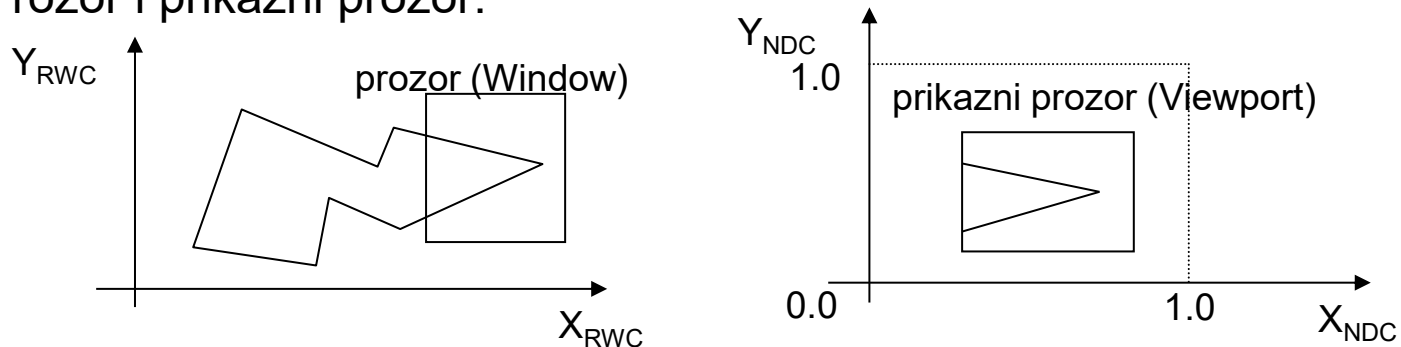


Složene transformacije

- q je slika tačke p definisane sa: $q=t_3(t_2(t_1(p)))$
 - t_x su elementarne transformacije koje se primenjuju redom: $x=1, 2, 3$
- Sledi (pošto je množenje matrica asocijativno):
$$Q=(((P*T_1)*T_2)*T_3) = P*(T_1*T_2*T_3) = P * T$$
 - T je kompozitna matrica složene transformacije, dok su T_1, T_2 i T_3 matrice elementarnih transformacija koje učestvuju u složenoj transformaciji
- U slučaju da se tačke predstavljaju kao vektori kolone:
$$Q^T = T^T * P^T$$
- Redosled transformacija je veoma važan
 - množenje matrica nije komutativno

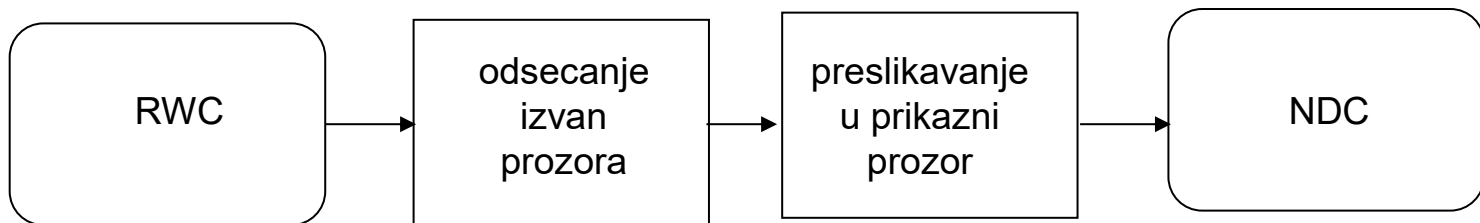
Primena 2D transformacija

- Jedna primena 2D transformacija je transformacija slike
 - iz koordinatnog sistema realnog sveta u normalizovane koordinate uređaja
- Koordinate sveta (*Real World Coordinates*, RWC)
 - obično u jedinicama dužine, npr. u [cm]
- Normalizovane koordinate uređaja (*Normalized Device Coordinates*, NDC)
 - [0.0, ... , 1.0]
- Koordinate uređaja
 - obično u jedinicama dužine ili u pikselima
- Prozor i prikazni prozor:



Generisanje prikaza

- Proces generisanja prikaza:



- Preslikavanje (mapiranje) iz prozora (W) u prikazni prozor (VP):
 - translacija (u RWC) tako da se koordinatni početak premesti u donji levi ugao prozora
 - skaliranje tako da se prozor preslika u prikazni prozor ($RWC \rightarrow NDC$);
 $S_x = \text{ŠirinaVP} / \text{ŠirinaW}$; $S_y = \text{VisinaVP} / \text{VisinaW}$
 - translacija (u NDC) tako da se prikazni prozor locira na željeno mesto unutar prikazne površine normalizovanog prikazivača

Primer

- Prozor je definisan pomoću sledećih relacija:
 $10 < x < 20, \quad 8 < y < 13,$
- Prikazni prozor je u gornjem levom uglu virtuelnog ekrana, u oblasti:
 $0.0 < x_d < 0.25, \quad 0.75 < y_d < 1.0$
- Rešenje:
 - translacija T1 koordinatnog sistema RW u donji levi ugao prozora: $O'(10,8)$
 - skaliranje S da bi se prozor preslikao u prikazni prozor:
 $S_x = (0.25 - 0.0)/(20 - 10) = 0.025 \quad S_y = (1.0 - 0.75)/(13 - 8) = 0.05$
 - translacija T2 koordinatnog početka iz donjeg levog ugla prikaznog prozora u donji levi ugao virtuelnog ekrana: $O''(0.0, -0.75)$
 - Kombinovanjem elementarnih transformacija dobija se kompozitna matrica totalne transformacije:

$$T1 \cdot S \cdot T2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -0.25 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$