Računarska grafika

Transformacije u 2D

Geometrijske transformacije

- Geometrijske transformacije preslikavaju originalnu tačku u njenu sliku
- Postoje dve konvencije za geometrijske transformacije kretanja (translacije i rotacije):
  - konvencija pokretnog koordinatnog sistema (pokretne virtuelne kamere, odnosno posmatrača)
  - konvencija pokretnog objekta
- Kretanja se u praksi kombinuju (kreće se i objekat i posmatrač)
- Za izvođenje jednačina kretanja pogodno je usvojiti jednu konvenciju
- Ovde se podrazumeva
  - da se tačka nalazi u „desnom“ pravouglom koordinatnom sistemu
  - da se primenjuje konvencija pokretne virtuelne kamere

Transformacije u 2D

- Pojam desnog pravouglog sistema je vezan za 3D sistem
- 2D pravougli koordinatni sistem je ovde definisan na sledeći način:
  - koordinatna osa prve koordinate (X) se prevodi u osu druge koordinate (Y) rotacijom oko koordinatnog početka za 90°
    u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku
  - X osa horizontalna, raste sleva-udesno; Y osa vertikalna, raste odozdo-nagore

- Linearne transformacije: skaliranje, rotacija, smicanje
- Afina transformacija: linearna transformacija koju sledi translacija
- U slučaju afinih transformacija, ako su koordinate originalne tačke (x,y), koordinate neke tačke nakon transformacije su (x',y'):

$$
\begin{aligned}
x' &= A1\cdot x + B1\cdot y + C1\cdot 1\\
y' &= A2\cdot x + B2\cdot y + C2\cdot 1\\
1 &= 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot 1
\end{aligned}
$$

Matrična predstava transformacija

- Poslednjim identitetom se proširuje sistem jednačina, da bi se predstavio u matričnom obliku (tačka – vektor vrsta):

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} A1 & A2 & 0 \\ B1 & B2 & 0 \\ C1 & C2 & 1 \end{bmatrix}$$

Q = P · M

  – gde je: Q – slika tačke, P – original tačke, M – matrica transformacija

- Drugi oblik matrične jednačine (tačka – vektor kolona): $Q^T = M^T \cdot P^T$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogene koordinate

- Predstava tačke u vektorskom obliku [x y]
  se proširuje trećom koordinatom jednakom 1: [x y 1]
- Koordinatni sistem za ovakvo predstavljanje tačke se naziva sistemom sa *homogenim koordinatama*
- Homogene koordinate čine matematički aparat uniformnim za sve transformacije
- Svaka transformacija se predstavlja adekvatnom matricom transformacije M
- Treća kolona matrice M je konstantna za sve 2D transformacije
- Jednom izračunata matrica transformacije se koristi
  - da bi se sve relevantne tačke neke 2D slike transformisale na jedinstven način
- U petlji se množe vektori originalnih tačaka matricom transformacije:

```
for (i=0; i<n; i++) q[i]=transform(p[i],M);
```

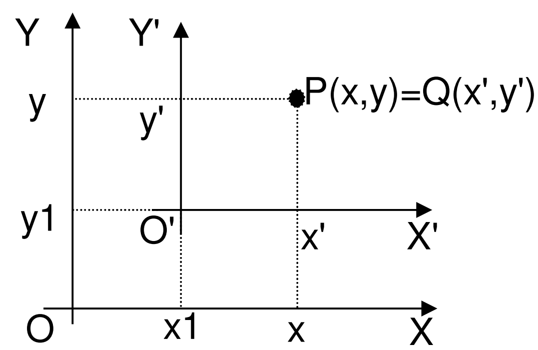
- Elementarnim transformacijama u 2D se smatraju
  - translacija, rotacija, skaliranje i smicanje

Translacija

- Koordinatni početak O(0,0) se translatorno pomera u tačku O'(x1,y1):

$$x' = 1\cdot x + 0\cdot y - x1\cdot 1$$
$$y' = 0\cdot x + 1\cdot y - y1\cdot 1$$
$$1 = 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot 1$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x1 & -y1 & 1 \end{bmatrix}$$

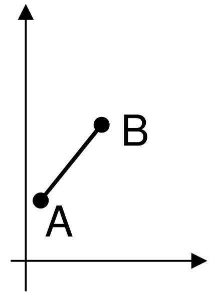


- Elementi C1 i C2 u opštoj matrici M
  - nazivaju se translatornim elementima

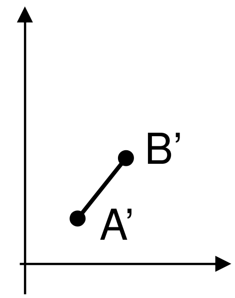
Translacija - primer

- Zadat je linijski segment krajnjim tačkama A(1,3) i B(4,6)
  - izvršiti translaciju koordinatnog sistema
    tako da se koordinatni početak premesti u tačku O'(-1,1)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

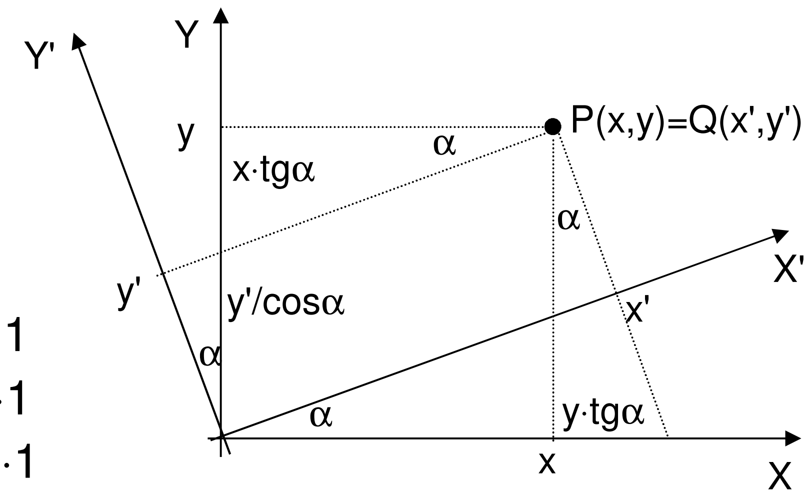


Rotacija

- Koordinatni sistem rotira oko centra u koordinatnom početku za ugao α u smeru nasuprot kretanja kazaljke na časovniku

$$x' = (x + y \cdot tg\alpha) \cdot \cos\alpha$$
$$y = x \cdot tg\alpha + y'/\cos\alpha$$
$$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y + 0 \cdot 1 \\ y' &= -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 1 &= 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{aligned}$$



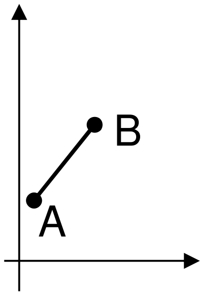
- Elementi A1, A2, B1 i B2 u opštoj matrici M
  - nazivaju se rotacionim elementima

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

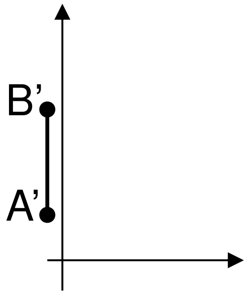
Rotacija - primer

- Zadat je linijski segment krajnjim tačkama A(1,3) i B(4,6)
  - rotirati koordinatni sistem za ugao α=45° u smeru kazaljke na časovniku

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$



$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$



Skaliranje

- Faktori skaliranja po X i Y osi: Sx i Sy
- Efekat:
  - S<1 => smanjivanje objekta (udaljavanje posmatrača),
  - S>1 => povećanje objekta (približavanje posmatrača)
- Preslikavanje:

$x' = Sx \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1$

$y' = 0 \cdot x + Sy \cdot y + 0 \cdot 1$

$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$

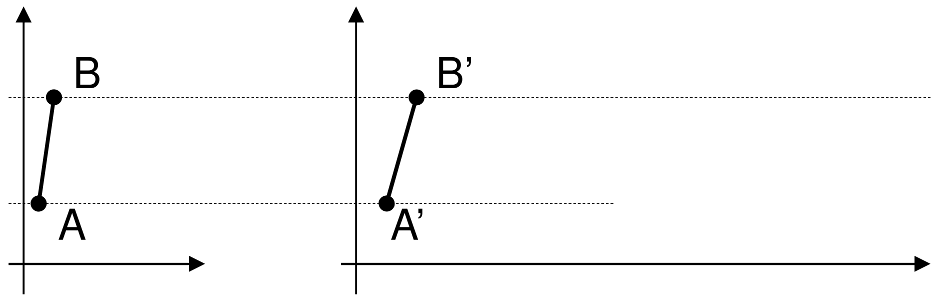
$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje - primer

- Primer:
  - segment linije određen je krajnjim tačkama A(1,3) i B(2,7).
  - izvršiti skaliranje, ako su dati skala faktori Sx=2 i Sy=1

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$



Refleksija

- Refleksija prema Y-osi:

  Sx=-1, Sy=1
- Refleksija prema X-osi:

  Sx=1, Sy=-1
- Refleksija prema proizvoljnoj osi:
  - translacijom se dovede koordinatni početak na datu osu
  - rotacijom se X-osa poklopi sa datom osom
  - primeni se refleksija prema X-osi
  - inverzna rotacija
  - inverzna translacija

Smicanje (Iskošenje/*Shear*)

- Faktori smicanja po X i Y-osi: Hx i Hy, respektivno
- Preslikavanje:

$$x' = 1 \cdot x + Hx \cdot y + 0 \cdot 1$$
$$y' = Hy \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1$$
$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1$$

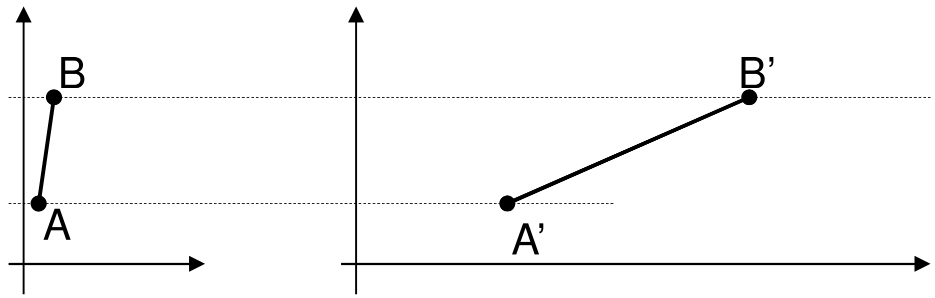
$$H = \begin{bmatrix} 1 & H_y & 0 \\ H_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Smicanje samo u pravcu X-ose: Hy=0;
- Smicanje samo u pravcu Y-ose: Hx=0

Smicanje - primer

- Primer:
  - segment linije određen je krajnjim tačkama A(1,3) i B(2,7)
  - izvršiti smicanje, ako su dati faktori smicanja Hx=2 i Hy=0

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$



Složene transformacije

- q je slika tačke p definisane sa: $q=t3(t2(t1(p)))$
  - tx su elementarne transformacije koje se primenjuju redom: x=1, 2, 3
- Sledi (pošto je množenje matrica asocijativno):

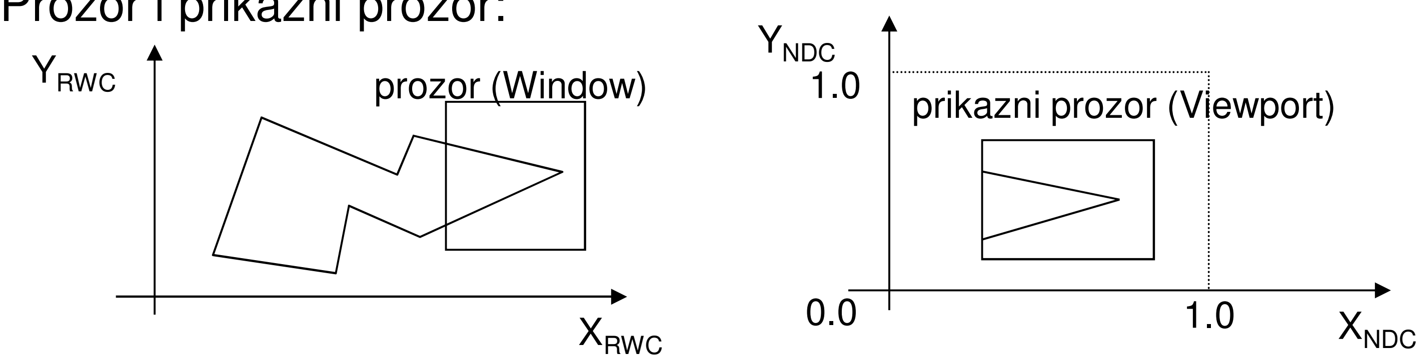
  $Q=(((P*T1)*T2)*T3) = P*(T1*T2*T3) = P * T$

  - T je kompozitna matrica složene transformacije, dok su T1, T2 i T3 matrice elementarnih transformacija koje učestvuju u složenoj transformaciji
- U slučaju da se tačke predstavljaju kao vektori kolone:

  $Q^T= T^T * P^T$
- Redosled transformacija je veoma važan
  - množenje matrica nije komutativno

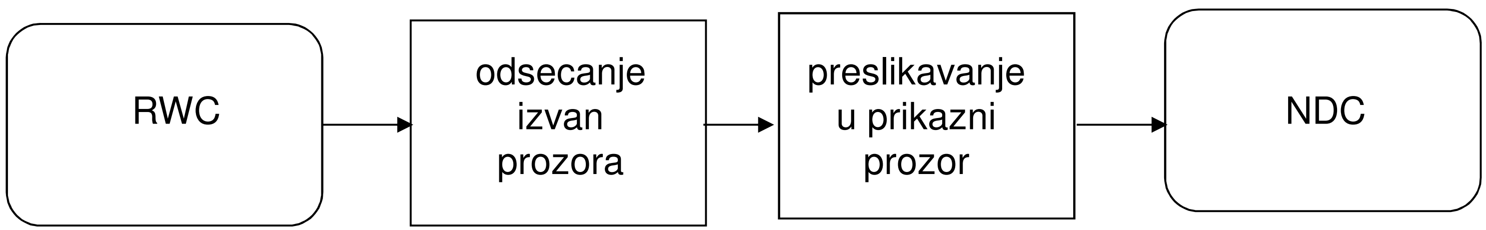
Primena 2D transformacija

- Jedna primena 2D transformacija je transformacija slike
  - iz koordinatnog sistema realnog sveta u normalizovane koordinate uređaja
- Koordinate sveta (*Real World Coordinates*, RWC)
  - obično u jedinicama dužine, npr. u [cm]
- Normalizovane koordinate uređaja (*Normalized Device Coordinates*, NDC)
  - [0.0, ... , 1.0]
- Koordinate uređaja
  - obično u jedinicama dužine ili u pikselima
- Prozor i prikazni prozor:



Generisanje prikaza

- Proces generisanja prikaza:



- Preslikavanje (mapiranje) iz prozora (W) u prikazni prozor (VP):
  1. translacija (u RWC) tako da se koordinatni početak premesti u donji levi ugao prozora
  2. skaliranje tako da se prozor preslika u prikazni prozor (RWC→NDC); Sx=ŠirinaVP/ŠirinaW; Sy=VisinaVP/VisinaW
  3. translacija (u NDC) tako da se prikazni prozor locira na željeno mesto unutar prikazne površine normalizovanog prikazivača

Primer

- Prozor je definisan pomoću sledećih relacija:
  $10 < x < 20, \quad 8 < y < 13,$
- Prikazni prozor je u gornjem levom uglu virtuelnog ekrana, u oblasti:
  $0.0 < xd < 0.25, \quad 0.75 < yd < 1.0$
- Rešenje:
  - translacija T1 koordinatnog sistema RW u donji levi ugao prozora: O'(10,8)
  - skaliranje S da bi se prozor preslikao u prikazni prozor:
    Sx =(0.25-0.0)/(20-10)=0.025 Sy =(1.0-0.75)/(13-8)=0.05
  - translacija T2 koordinatnog početka iz donjeg levog ugla prikaznog prozora u donji levi ugao virtuelnog ekrana: O''(0.0,-0.75)
  - Kombinovanjem elementarnih transformacija dobija se kompozitna matrica totalne transformacije:

$$\mathrm{T1} \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{T2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -0.25 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$